



## Teoria de Filas: um estudo de simulação

Prof<sup>a</sup>. Ma. Walkiria M.de Oliveira Macerau<sup>1</sup>, Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Ana Beatriz Tozzo Martins<sup>2</sup> e Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Terezinha Aparecida Guedes<sup>3</sup>

<sup>1</sup>, <sup>2</sup> e <sup>3</sup> DES-UEM

### RESUMO

A teoria das filas é um método analítico da modelagem de sistemas. Essa teoria provê modelos probabilísticos para demonstrar previamente o comportamento de um sistema que ofereça serviços ou atendimentos cuja demanda cresce aleatoriamente. O objetivo da metodologia da teoria das filas é fazer com que o sistema tenha um funcionamento eficiente, entretanto, para a aplicação dessa metodologia é necessário ter estabilidade no fluxo de chegada e no processo de atendimento, e para verificar essa estabilidade utiliza-se as medidas de desempenho.

**Palavras chave:** Teoria de filas, taxa de chegada, taxa de atendimento, processo estável.

## 1 INTRODUÇÃO

A teoria das filas é um método analítico da modelagem de sistemas, em que o assunto é abordado por meio de fórmulas matemáticas. Essa teoria provê modelos probabilísticos para demonstrar previamente o comportamento de um sistema que ofereça serviços ou atendimentos cuja demanda cresce aleatoriamente. Tornando possível dimensioná-lo de forma a satisfazer os clientes e ser viável economicamente para o provedor do serviço, evitando desperdícios e gargalos.

Moreira (2010), define a teoria das filas como um corpo de conhecimentos matemáticos aplicado ao fenômeno das filas. Para Fogliatti (2007), a teoria das filas consiste na modelagem analítica de processos ou sistemas que resultam em espera e, tem como objetivo, determinar e avaliar quantidades denominadas medidas de desempenho, que expressam a produtividade/operacionalidade desses produtos e, de posse destas informações, buscar meios para minimizar os impactos negativos das esperas nos processos.

A abordagem matemática das filas iniciou em 1908 em Copenhague, Dinamarca, por Agner Krarup Erlang considerado o pai da teoria das filas. Erlang trabalhava em uma companhia telefônica estudando o problema de redimensionamento de centrais telefônicas. Esta a aplicação mais antiga da teoria das filas, isto é, um projeto de sistema de telefonia (Brockmeyer *et al.*, 1948).

O objetivo da metodologia da teoria das filas é fazer com que o sistema tenha um funcionamento eficiente, com qualidade de atendimento. Para isso é necessário um estudo que irá definir a quantidade adequada de atendentes (ou de equipamentos, ou de veículos, ou de pessoas, e etc.) que devem ser colocadas em cada estação de trabalho.

Para a aplicação da metodologia de teoria das filas é necessário ter estabilidade no fluxo de chegada e no processo de atendimento, ou seja, a taxa de chegada e a taxa de atendimento tem que se manter constantes ao longo do tempo. Outra exigência para que o processo seja estável é que os atendentes sejam capazes de atender ao fluxo de chegada, por exemplo, no caso de "uma fila e um atendente".

As medidas de desempenho da teoria das filas contribuem para um melhor serviço do sistema, auxiliando na tomadas de decisões de proprietários de estabelecimentos. Uma vez que a maioria das decisões tomadas por proprietário de estabelecimentos são fundamentadas na sua experiência, seu bom senso e/ou adivinhação, com a teoria das filas é possível apresentar que as decisões podem ser tomadas com base em uma metodologia científica.

Devido, pois, a importância em estudar a metodologia da teoria das filas e aplicá-las, este trabalho foi elaborado de forma a apresentar os conceitos de caracterização dos processos com geração da fila; seus componentes e fundamentos estatísticos necessários à compreensão dos modelos; e suas utilizações em algumas aplicações, uma vez que existem poucas informações sobre o assunto.

## 2 METODOLOGIA

Neste trabalho utilizou-se dados simulados para apresentar a metodologia de teoria de filas. Na simulação apresenta-se o comportamento de algumas medidas de desempenho, tais como, probabilidade de existirem  $n$  clientes no sistema, número médio de clientes na fila e no sistema, tempo médio de espera na fila e no sistema e probabilidade do tempo de espera na fila ser zero, todas essas simulações foram em função da taxa de ocupação  $\rho$ , considerando os Modelos  $M/M/1$  e  $M/M/S$ . Os dados foram simulados por meio do *software* R (3.4.1, 2017) e neste resumo apresentamos apenas alguns resultados obtidos para o modelo  $M/M/1$ .

## 3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 3.1 Resultados do Modelo $M/M/1$

Simulou-se a probabilidade de existirem  $n$  clientes no sistema  $P_n$ , em função da taxa de ocupação  $\rho$ , tomando  $n=0, 1, 5$  e  $20$  clientes. A Figura 1 apresenta os resultados encontrados.

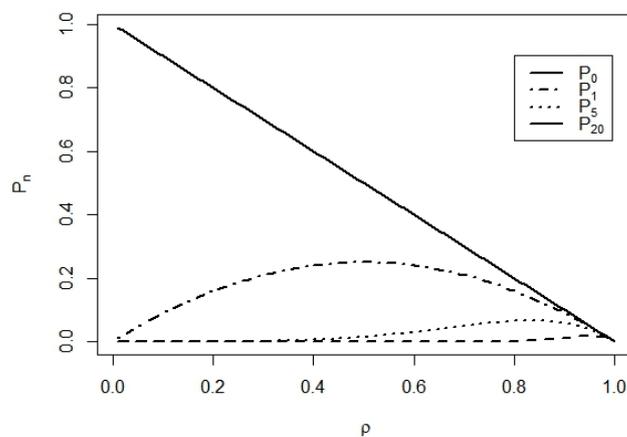


Figura 1: Probabilidade de existirem  $n$  clientes no sistema  $P_n$ , numa escala de 0 à 1, em função da taxa de ocupação  $\rho$ .

Observa-se por meio da Figura 1 que quando a taxa de ocupação tende para 1, a probabilidade de existirem  $n$  clientes no sistema tende para 0 (zero), e que quanto maior for o número de clientes, mais a probabilidade se aproxima de 0, independente da taxa de ocupação.

Reduziu-se a escala dos valores da probabilidade de existirem  $n$  clientes no sistema de 1 para 0,04, ou seja, tomou-se uma escala de 0 à 0,04, e também valores de  $n=10, 20, 30$  e  $40$  clientes. Apresenta-se na Figura 2 os resultados obtidos.

Pode-se observar por meio da Figura 2 que a probabilidade de existirem  $n$  clientes no sistema também tende para zero, conforme a taxa de ocupação também tende 1, e que as curvas das probabilidades apresentam uma distribuição assimétrica à esquerda.

Supondo uma situação de equilíbrio, simulou-se alguns valores para o número médio de clientes no sistema  $L_s$ , e para o número médio de clientes na fila  $L_q$ , ambos em função da taxa de ocupação  $\rho$ . Apresenta-se os resultados na Figura 3.

Observa-se por meio da Figura 3 que o número médio de clientes no sistema e o número médio de clientes na fila, ou comprimento médio da fila, aumenta em função da taxa de ocupação, em outras palavras, quando  $\rho$  converge para 1 o número de clientes no sistema e na fila tende para infinito, isto é, mais clientes ficam no sistema esperando sair do sistema.

Também simulou-se valores para o tempo médio de espera no sistema  $W_s$ , e o tempo média de espera na fila  $W_q$ , supondo alguns valores para a taxa de atendimento  $\mu$  (ou de serviço), ou seja,  $\mu = 0, 5; 1; 5$  e  $50$ . Os resultados são apresentados, respectivamente, nas Figuras 4 e 5.

Observa-se pelas Figura 4 e Figura 5, que independente da taxa de serviço, a medida que a taxa de ocupação aumenta, o tempo médio de espera dos clientes no sistema ou na fila também aumenta, ou

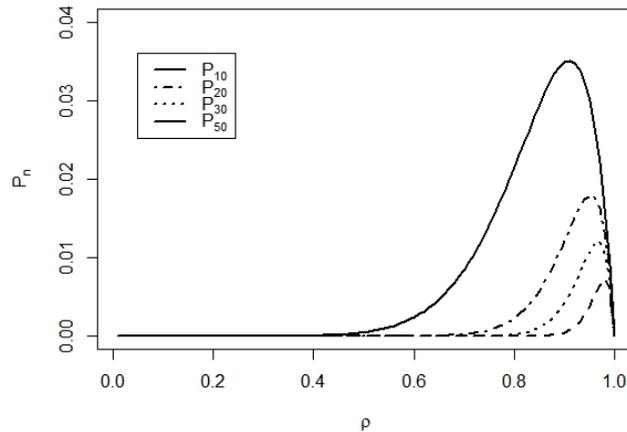


Figura 2: Probabilidade de existirem  $n$  clientes no sistema  $P_n$ , numa escala de 0 à 0.04, em função da taxa de ocupação  $\rho$ .

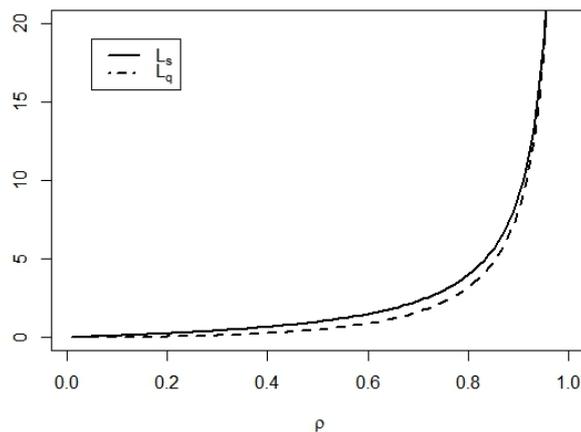


Figura 3: Número médio de clientes no sistema  $L_s$ , e na fila  $L_q$ , em função da taxa de ocupação  $\rho$ .

seja, o tempo médio de espera dos clientes tanto na fila quanto no sistema tende para infinito, quando  $\rho$  converge para 1. Quanto a taxa de serviço pode-se observar que quanto maior for a taxa de serviço menos tempo os clientes ficam no sistema, isto é, esperando sair do sistema.

## 4 CONCLUSÃO

Conclui-se que uma medida de extrema importância na teoria de filas é a taxa de ocupação, pois observa-se que com o aumento dessa taxa, a probabilidade de existirem  $n$  clientes no sistema é praticamente nula, o número médio de clientes no sistema e na fila aumenta infinitamente, o mesmo ocorre com o tempo médio de na fila e no sistema, e a probabilidade do tempo de espera na fila diminui, sendo que isso ocorre tanto no modelo  $M/M/1$  quanto no  $M/M/S$ .

A taxa de ocupação nada mais é que a percentagem de tempo durante o qual o serviço está ocupado, ou seja, ela é uma relação entre o tempo médio de atendimento e o intervalo médio entre duas chegadas consecutivas. O proprietário tem condições de quantificar o tempo médio de atendimento e os intervalos entre as chegadas, sendo possível calcular a taxa de ocupação, por meio dessas medidas.

Uma vez controladas essas medidas, pode-se calcular as taxas de serviço, de chegada, e de ocupação,

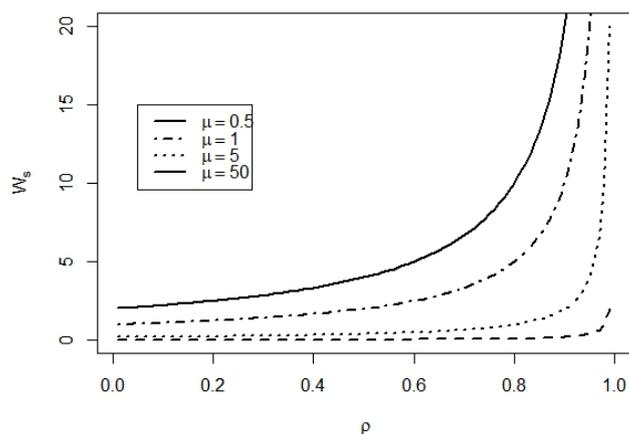


Figura 4: Tempo médio de espera no sistema  $W_s$ , em função da taxa de ocupação  $\rho$ .

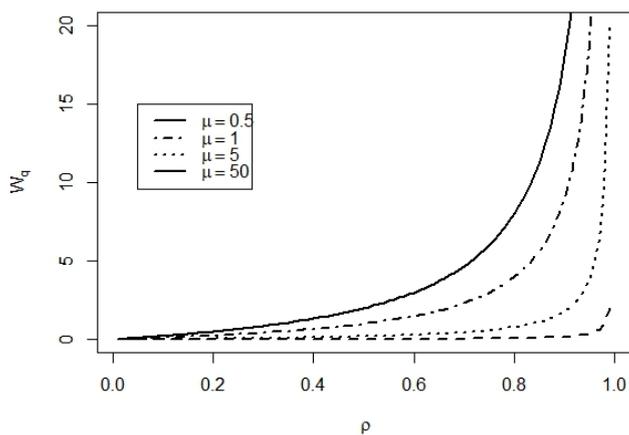


Figura 5: Tempo médio de espera na fila  $W_q$ , em função da taxa de ocupação  $\rho$ .

por consequência todas as medidas de desempenho da teoria das filas podem ser obtidas, e então, as decisões podem ser tomadas com base em uma metodologia científica.

## Referências

- [1] BROCKMEYER, E.; HALSTRON, H. L; JENSEN, A. *The life and Works of A. K. Erlang*. Trans. Danish Acad. Techn Sci. 2, Copenhagen 1948.
- [2] FOGLIATTI, M.C; MATTOS, N. M. C. *Teoria de Filas*. Rio de Janeiro, RJ: Interciência, 290p, 2007.
- [3] MOREIRA, D. A. *Pesquisa Operacional: Curso Introdutório*. 3ª. Ed. ver. eatu. São Paulo: Cengage Learning, 356p, 2010.
- [4] R DEVELOPMENT CORE TEAM. R: A language and enviroment for statistical computing: versão 3.4.1.v. Vienna: R Foudation for Statistical Computing. Disponível em: < [http : //www.R – project.org](http://www.R-project.org) >. Acesso em: 19 setembro de 2017.